Exercices pour s'entraîner

Analyse - Développements limités

Exercice 1 *Déterminer le développement limité en* 0, *à l'ordre indiqué, de la fonction* f *quand* f *est définie par :*
(a) $f(x)=\tan(x)$, *à l'ordre 6 ;*
(b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$, *à l'ordre 4 ;*
(c) $f(x)=\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{1/x^2}$, *à l'ordre 2.*

Eléments de résolution On veut le développement limité en 0, à l'ordre indiqué, de la fonction f quand
(a) $f(x)=\tan(x)$ à l'ordre 6.
On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\
&= \frac{x-x^3/3!+x^5/5!+o\left(x^6\right)}{1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+o\left(x^6\right)}\\
&= \frac{x-x^3/3!+x^5/5!+o\left(x^6\right)}{1-\left(x^2/2!-x^4/4!+x^6/6!+o\left(x^6\right)\right)}\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)\right)\times\\
&\quad \left(1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)^3+o\left(x^6\right)\right)^{-1}\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^4}{4}-\frac{2}{2\times 24}x^6+\frac{x^6}{8}+o\left(x^6\right)\right)\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}-\frac{59x^6}{720}+o\left(x^6\right)\right)\\
&= x+\frac{x^3}{2}+\frac{5x^5}{24}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)\\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

(b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$, à l'ordre 4.

En utilisant le (a), on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\frac{1+x+x^3/3+o(x^4)}{1-(x+x^3/3)+o(x^4)}\right) \\
&= \ln\left[\left(1+x+x^3/3+o(x^4)\right)\left(1-(x+x^3/3)+o(x^4)\right)^{-1}\right] \\
&= \ln\left[\left(1+x+x^3/3+o(x^4)\right)\left(1+(x+x^3/3)+(x+x^3/3)^2+(x+x^3/3)^3+(x+x^3/3)^4+o(x^4)\right)\right] \\
&= \ln\left[\left(1+x+x^3/3+o(x^4)\right)\left(1+(x+x^3/3)+(x^2+2x^4/3)+x^3+x^4+o(x^4)\right)\right] \\
&= \ln\left[\left(1+x+x^3/3+o(x^4)\right)\left(1+x+x^2+4x^3/3+5x^4/3+o(x^4)\right)\right] \\
&= \ln\left(1+x+x^2+4x^3/3+5x^4/3+x+x^2+x^3+4x^4/3+x^3/3+x^4/3+o(x^4)\right) \\
&= \ln\left(1+2x+2x^2+8x^3/3+10x^4/3+o(x^4)\right) \\
&= \left(2x+2x^2+8x^3/3+10x^4/3\right)-\frac{\left(2x+2x^2+8x^3/3+10x^4/3\right)^2}{2}+\frac{\left(2x+2x^2+8x^3/3+10x^4/3\right)^3}{3} \\
&\quad -\frac{\left(2x+2x^2+8x^3/3+10x^4/3\right)^4}{4}+o(x^4) \\
&= 2x+2x^2+8x^3/3+10x^4/3-\frac{1}{2}\left(4x^2+8x^3+4x^4+\frac{32}{3}x^4\right)+\frac{1}{3}\left(8x^3+3\times 4x^2\times 2x^2\right)-\frac{1}{4}16x^4+o(x^4) \\
&= 2x+0x^2+\frac{4}{3}x^3+0x^4+o(x^4) \\
&= 2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^4).
\end{aligned}$$

(c) $f(x)=\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{1/x^2}$, à l'ordre 2.
On a :

$$f(x)=\exp\left[\frac{1}{x^2}\times\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)\right]$$

Pour avoir un développement limité (DL) de f à l'ordre 2, on a besoin d'un DL de $\left[\dfrac{1}{x^2}\times\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)\right]$ à l'ordre 2, donc un DL de $\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4, donc un DL de $\dfrac{\tan(x)}{x}$ à l'ordre 4 et donc, finalement, un DL à l'ordre 5 de $\tan(x)$. Et avec (a), on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left[\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{2}{15}x^4+o(x^4)\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{x^2}\left(\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{15}x^4\right)-\frac{\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{15}x^4\right)^2}{2}+o(x^4)\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{15}x^4-\frac{x^4}{18}\right)+o(x^4)\right] \\
&= \exp\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{90}x^2+o(x^2)\right) \\
&= e^{1/3}\times\exp\left(\frac{7}{90}x^2+o(x^2)\right) \\
&= e^{1/3}\left(1+\frac{7}{90}x^2+o(x^2)\right) \\
&= e^{1/3}+\frac{7e^{1/3}}{90}x^2+o(x^2).
\end{aligned}$$

Exercice 2 *Déterminer un équivalent de* $f(x) = \dfrac{1}{x(e^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ *au voisinage de* 0.

Eléments de résolution On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{x + 1 - e^x}{x(e^x - 1)} \end{aligned}$$

Avec un DL à l'ordre 2 de e^x, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \times \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x(x + x^2/2 + o(x^2))} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{-1/2 + o(1)}{1 + x/2 + o(x)} \end{aligned}$$

et on en déduit

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2x}$$

Remarque On en déduit : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

Exercice 3 *Déterminer la limite en a, si elle existe, de la fonction f quand f est définie par :*

(a) $f(x) = \dfrac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$, avec $a = 0$;
(b) $f(x) = \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$, avec $a = 1$;
(c) $f(x) = \cos(x)\, e^{1/(1 - \sin(x))}$, avec $a = \frac{\pi}{2}$;
(d) $f(x) = sh\left(\sqrt{x^2 + x}\right) - sh\left(\sqrt{x^2 - x}\right)$, avec $a = +\infty$;
(e) $f(x) = \left(2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{1 + \dfrac{2}{x}}\right)^{x^2}$, avec $a = +\infty$;
(f) $f(x) = \left(\dfrac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)}$, avec $a = 2$.

Eléments de résolution (a) Limite de $f(x) = \dfrac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$ en 0.

On obtient une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$" en 0. Pour lever cette indétermination, effectuons un DL_3 des termes en tan et un DL_2 de cos ; avec l'exercice 1(a), on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(2x + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)\right)}{x\left(\frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right)} \\ &= \frac{-2x^3 + o(x^3)}{\frac{9}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{-2 + o(1)}{\frac{9}{2} + o(1)} \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{4}{9}$.

(b) Limite de $f(x) = \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$ en 1.

On obtient une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$" en 1. Pour lever cette indétermination, posons $x = 1 + t$ et effectuons un DL_2 en 0 de $(1+t)^{1+t}$ et de $\ln(1+t)$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(1+t) &= t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right) \\
\text{et } (1+t)^{1+t} &= \exp\left[(1+t)\ln(1+t)\right] \\
&= \exp\left[(1+t)\left(t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(t+\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right) \\
&= 1+\left(t+\frac{t^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^2+o\left(t^2\right) \\
&= 1+t+t^2+o\left(t^2\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$f(1+t)=\frac{t^2+o\left(t^2\right)}{-t^2/2+o\left(t^2\right)}=\frac{1+o(1)}{-1/2+o(1)}$$

et on obtient : $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}=-2.$

(c) Limite de $f(x)=\cos(x)\,e^{1/(1-\sin(x))}$ en $a=\frac{\pi}{2}$.

Puisque $\lim_{x\to\pi/2}(1-\sin(x))=0^+$, on arrive, pour $f(x)$, à une forme indéterminée de la forme "$+\infty\times 0$". Pour ramener l'étude à une limite en 0, posons $x=\dfrac{\pi}{2}+t$; on obtient :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}+t\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)e^{1/1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} \\
&= -\sin(t)\,e^{1/1-\cos(t)}
\end{aligned}$$

En effectuant un DL_2 de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en 0, on obtient :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}+t\right) &= -\left(t+o\left(t^2\right)\right)\exp\left[\frac{1}{t^2/2+o\left(t^2\right)}\right] \\
&= -t\,(1+o(t))\exp\left[\frac{1}{t^2}\,(2+o(1))\right]
\end{aligned}$$

D'où

$$f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\underset{0}{\sim}-t\exp\left(\frac{2}{t^2}\right)$$

Puis, en posant $u=\dfrac{1}{t}$, chercher la limite en 0 de $f\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$ revient à chercher la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de $f\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{u}\right)$; avec ce qui précède, on a :

$$f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{u}\right)\underset{\infty}{\sim}-\frac{e^{2u^2}}{u}$$

et avec les puissances comparées, on en déduit :

$$\lim_{x\to\pi/2}\cos(x)\,e^{1/(1-\sin(x))}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{e^{2u^2}}{u}=-\infty$$

(d) Limite en $+\infty$ de $f(x)=sh\left(\sqrt{x^2+x}\right)-sh\left(\sqrt{x^2-x}\right)$.

Puisque $\lim_{v\to+\infty}sh(v)=+\infty$, on obtient une forme indéterminée du type "$+\infty-\infty$".

Pour $x\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left[e^{\sqrt{x^2+x}}-e^{-\sqrt{x^2+x}}-e^{\sqrt{x^2-x}}+e^{-\sqrt{x^2-x}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{\sqrt{x^2+x}}-e^{\sqrt{x^2-x}}\right]+\frac{1}{2}\left[e^{-\sqrt{x^2-x}}-e^{-\sqrt{x^2+x}}\right]
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left[e^{-\sqrt{x^2-x}}-e^{-\sqrt{x^2+x}}\right]=0$; il reste donc à étudier la limite en $+\infty$ de $g(x)=\frac{1}{2}\left[e^{\sqrt{x^2+x}}-e^{\sqrt{x^2-x}}\right]$. Pour cela, on va se ramener à une étude en 0 (par valeurs supérieures) en posant $t=\dfrac{1}{x}$; on obtient : $\forall t\in\,]0,1]$,

$$g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}\left[\exp\left(\frac{1}{t}\sqrt{1+t}\right)-\exp\left(\frac{1}{t}\sqrt{1-t}\right)\right]$$

En effectuant un DL_2 en 0 de $\sqrt{1+t}$ et de $\sqrt{1-t}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{2}\left[\exp\left(\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right)\right)-\exp\left(\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right)\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[e^{1/t}\exp\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t+o(t)\right)-e^{1/t}\exp\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t+o(t)\right)\right]\\
&= \frac{e^{1/t}}{2}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}t+o(t)\right)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}t+o(t)\right)\right)\right]\\
&= \frac{e^{1/t}}{2}\left[e^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{4}t+o(t)\right)-e^{-1/2}\exp\left(\frac{1}{4}t+o(t)\right)\right]\\
&= \frac{e^{1/t}}{2}\left[e^{1/2}\left(1-\frac{1}{4}t+o(t)\right)-e^{-1/2}\left(1+\frac{1}{4}t+o(t)\right)\right]\\
&= \frac{e^{1/t}}{2}\left[e^{1/2}-e^{-1/2}-\frac{t}{4}\left(e^{1/2}+e^{-1/2}\right)+o(t)\right]
\end{aligned}$$

Avec

$$\lim_{t\to0^+}\frac{e^{1/t}}{2}=+\infty$$

et

$$\lim_{t\to0}\left[e^{1/2}-e^{-1/2}-\frac{t}{4}\left(e^{1/2}+e^{-1/2}\right)+o(t)\right]=e^{1/2}-e^{-1/2}>0$$

on en déduit : $\lim_{x\to+\infty}sh\left(\sqrt{x^2+x}\right)-sh\left(\sqrt{x^2-x}\right)=+\infty$.

(e) Limite de $f(x)=\left(2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)^{x^2}$, en $+\infty$.

On obtient ici une forme indéterminée du type "$1^{+\infty}$". On a : $\forall x>0$,

$$f(x)=\exp\left[x^2\ln\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\right]$$

Puis on se ramène à étudier une limite en 0 (par valeurs supérieures) en posant $t=\dfrac{1}{x}$; on obtient :

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\exp\left[\frac{1}{t^2}\ln\left(2\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}\right)\right]$$

Effectuons un DL_2 en 0 de $\sqrt{1+t}$ et de $\sqrt{1+2t}$; on a :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{t}\right) &= \exp\left[\frac{1}{t^2}\ln\left(2\left(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right)-\left(1+\frac{1}{2}2t-\frac{1}{8}(2t)^2+o\left(t^2\right)\right)\right)\right]\\
&= \exp\left[\frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{1}{4}t^2+o\left(t^2\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Puis, avec un DL_1 de $\ln(1+u)$ en 0, on obtient :

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\exp\left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4}t^2+o\left(t^2\right)\right)\right]=\exp\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)$$

On en déduit : $\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)^{x^2}=e^{1/4}$.

(f) Limite de $f(x)=\left(\dfrac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)}$ en 2.

On obtient une forme indéterminée du type "1^∞" en 2. Pour lever cette indétermination, posons d'abord $x=2+t$ pour se ramener à chercher une limite en 0 ; on obtient :

$$\begin{aligned}
f(2+t) &= \exp\left[\frac{-1}{t}\left(\ln\left(2^{2+t}+3^{2+t}\right)-\ln\left(2^{3+t}+5^{1+t/2}\right)\right)\right]\\
&= \exp\left[\frac{-1}{t}\left(\ln\left(4e^{t\ln(2)}+9e^{t\ln(3)}\right)-\ln\left(8e^{t\ln(2)}+5e^{\frac{t\ln(5)}{2}}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Puis effectuons des DL_2 en 0 des différentes fonctions composant $f(2+t)$; on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left(4e^{t\ln(2)}+9e^{t\ln(3)}\right) &= \ln\left[4\left(1+t\ln(2)+\frac{(t\ln(2))^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)+9\left(1+t\ln(3)+\frac{(t\ln(3))^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)\right]\\
&= \ln\left[13+(4\ln(2)+9\ln(3))\,t+\frac{4(\ln(2))^2+9(\ln(3))^2}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right]\\
&= \ln(13)+\ln\left[1+\frac{4\ln(2)+9\ln(3)}{13}t+\frac{4(\ln(2))^2+9(\ln(3))^2}{26}t^2+o\left(t^2\right)\right]\\
&= \ln(13)+\frac{4\ln(2)+9\ln(3)}{13}t+\frac{4(\ln(2))^2+9(\ln(3))^2}{26}t^2\\
&\quad+\left(\frac{4\ln(2)+9\ln(3)}{13}t+\frac{4(\ln(2))^2+9(\ln(3))^2}{26}t^2\right)^2+o\left(t^2\right)\\
&= \ln(13)+\frac{4\ln(2)+9\ln(3)}{13}t+\left(\frac{4(\ln(2))^2+9(\ln(3))^2}{26}+\left(\frac{(4\ln(2)+9\ln(3))}{13}\right)^2\right)t^2+o\left(t^2\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\ln\left(8e^{t\ln(2)}+5e^{\frac{t\ln(5)}{2}}\right) &= \ln\left[8\left(1+t\ln(2)+\frac{(t\ln(2))^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)+5\left(1+\frac{t}{2}\ln(5)+\frac{\left(\frac{t}{2}\ln(5)\right)^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)\right]\\
&= \ln\left[13+\left(8\ln(2)+\frac{5}{2}\ln(5)\right)t+\left(4(\ln(2))^2+\frac{5}{8}(\ln(5))^2\right)t^2+o\left(t^2\right)\right]\\
&= \ln(13)+\ln\left[1+\frac{8\ln(2)+\frac{5}{2}\ln(5)}{13}t+\left(\frac{4(\ln(2))^2+\frac{5}{8}(\ln(5))^2}{13}\right)t^2+o\left(t^2\right)\right]\\
&= \ln(13)+\frac{8\ln(2)+\frac{5}{2}\ln(5)}{13}t+\left(\frac{4(\ln(2))^2+\frac{5}{8}(\ln(5))^2}{13}\right)t^2\\
&\quad+\left(\frac{8\ln(2)+\frac{5}{2}\ln(5)}{13}t+\left(\frac{4(\ln(2))^2+\frac{5}{8}(\ln(5))^2}{13}\right)t^2\right)^2+o\left(t^2\right)\\
&= \ln(13)+\frac{8\ln(2)+\frac{5}{2}\ln(5)}{13}t+\left(\frac{4(\ln(2))^2+\frac{5}{8}(\ln(5))^2}{13}+\left(\frac{\left(8\ln(2)+\frac{5}{2}\ln(5)\right)}{13}\right)^2\right)t^2+o\left(t^2\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
f(2+t) &= \exp\left[\frac{-1}{t}\left(\frac{-4\ln(2)+9\ln(3)-\frac{5}{2}\ln(5)}{13}t+\alpha t^2+o\left(t^2\right)\right)\right]=\exp\left[\frac{4\ln(2)-9\ln(3)+\frac{5}{2}\ln(5)}{13}+\alpha t+o(t)\right]\\
\text{où } \alpha &= \frac{4(\ln(2))^2+9(\ln(3))^2}{26}+\left(\frac{(4\ln(2)+9\ln(3))}{13}\right)^2-\frac{4(\ln(2))^2+\frac{5}{8}(\ln(5))^2}{13}-\left(\frac{\left(8\ln(2)+\frac{5}{2}\ln(5)\right)}{13}\right)^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)}=\exp\left[\frac{4\ln(2)-9\ln(3)+\frac{5}{2}\ln(5)}{13}\right]=\exp\left[\frac{1}{13}\ln\left(\frac{2^4\times 5^{5/2}}{3^9}\right)\right]=\left(\frac{2^4\times 5^{5/2}}{3^9}\right)^{1/13}$$

Exercice 4 *Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln|sh(3x-7)-ch(x+1)|$.*
Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique, que l'on déterminera, en $+\infty$.

Eléments de résolution On a : $\forall x\in D_f$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{1}{2}\left|e^{3x-7}-e^{-(3x-7)}-e^{x+1}-e^{-(x+1)}\right|\right) \\ &= -\ln(2)+\ln\left(e^{3x-7}\left|1-e^{-6x+14}-e^{-2x+8}-e^{-4x+6}\right|\right) \\ &= -\ln(2)+\ln\left(e^{3x-7}\right)+\ln\left|1-\left(e^{-6x+14}+e^{-2x+8}+e^{-4x+6}\right)\right| \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}(-6x+14)=\lim_{x\to+\infty}(-2x+8)=\lim_{x\to+\infty}(-4x+6)=-\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-6x+14}+e^{-2x+8}+e^{-4x+6}\right)=0$$

donc, pour x suffisamment grand, on obtient :

$$f(x)=-\ln(2)+3x-7+\ln\left(1-\left(e^{-6x+14}+e^{-2x+8}+e^{-4x+6}\right)\right)$$

et avec un DL_1 de $\ln(1+u)$ en 0 :

$$f(x)=3x-7-\ln(2)-\left(e^{-6x+14}+e^{-2x+8}+e^{-4x+6}\right)+o\left(\left(e^{-6x+14}+e^{-2x+8}+e^{-4x+6}\right)\right)$$

ce qui prouve que l'on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-7-\ln(2))\right]=0$$

et donc que la droite d'équation $y=3x-7-\ln(2)$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.